

1 Enunciado

Se tienen dos condensadores idénticos, cada uno de ellos formado por dos discos conductores paralelos de sección S , separados por un medio dieléctrico de espesor d , constante dieléctrica κ y cuya ruptura dieléctrica se produce para un campo eléctrico de intensidad mayor o igual que un valor E_{rup} conocido. ¿Cómo deben asociarse para poder almacenar el máximo de energía eléctrica en el sistema resultante de la asociación?

2 Solución

Un condensador plano de sección S , y relleno de un dieléctrico de constante κ y espesor d , tiene una capacidad eléctrica

$$C = \kappa \frac{\epsilon_0 S}{d} = \kappa C_0$$

La energía electrostática de una asociación de condensadores rellenos de materiales dieléctricos, responde a la expresión general de esta magnitud para sistemas donde la carga eléctrica se halla distribuida en conductores en equilibrio:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{F}} V dq = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i$$

donde Q_i y V_i son, respectivamente, la cantidad de carga libre y el potencial del conductor i -ésimo. El valor máximo de energía electrostática que puede almacenar el sistema estará determinado por las diferencias de potencial máximas a que pueden ser sometidos los condensadores sin que el campo eléctrico en los dieléctricos llegue a superar el valor de ruptura E_{rup} . Comprobemos cuál es este valor máximo para el caso de las asociaciones en paralelo y en serie de los dos condensadores plano idénticos que se consideran en este ejercicio.

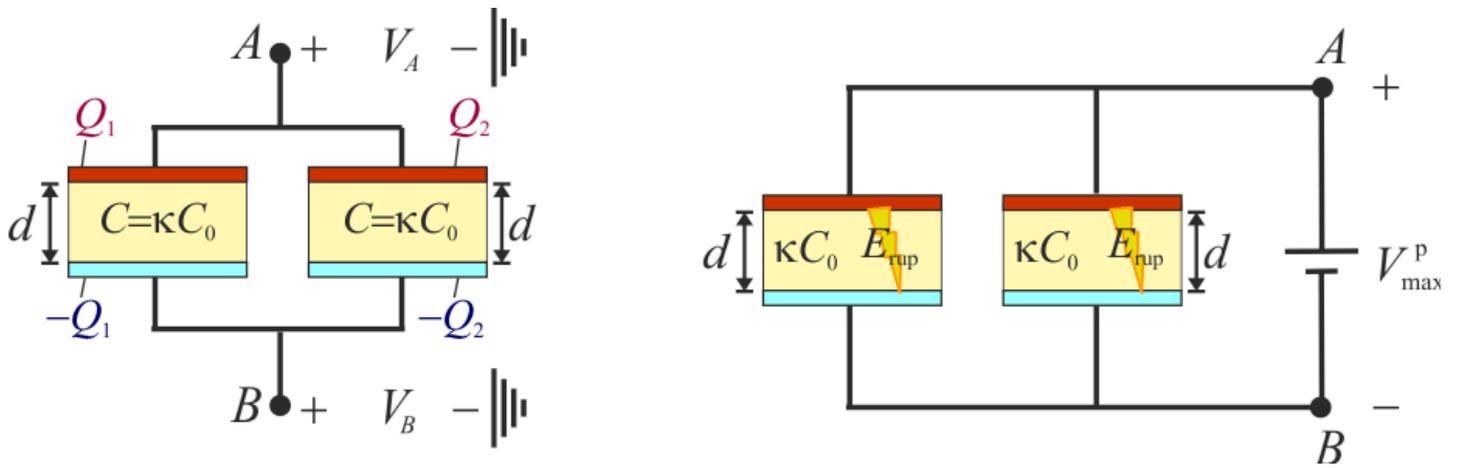
2.1 Asociación en paralelo

En este caso, ambos condensadores estarán sometidos a idéntica diferencia de potencial $\Delta V = V_A - V_B$ y, al ser igual capacidad eléctrica, almacenarán la misma cantidad de carga en los conductores equipotenciales de uno y otro condensador. Este resultado permite determinar la relación entre la energía electrostática almacenada en la asociación en paralelo, U_e^p , y la diferencia de potencial entre los conductores equipotenciales:

$$Q_1 = C(V_A - V_B) = Q_2 \quad \rightarrow \quad U_e^p = \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2)(V_A - V_B) = C(V_A - V_B)^2$$

Tenemos ahora en cuenta que la diferencia de potencial aplicable entre los conductores equipotenciales no puede ser cualquiera, pues estará limitada por el valor V_{max}^p que produciría la ruptura dieléctrica. Obsérvese que, al ser los condensadores idénticos y estar conectados en paralelo, dicha ruptura se produciría simultáneamente (al menos en teoría). Teniendo en cuenta que el campo eléctrico en el interior de un condensador plano paralelo es uniforme y perpendicular a las superficies conductoras, se tendrá:

$$V_A - V_B = \int_{A(diel)}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{E}| d < E_{rup} d = V_{max}^p \quad \Rightarrow \quad U_e^p < C (V_{max}^p)^2 = C d^2 E_{rup}^2 = U_e^p|_{max}$$



2.2 Asociación en serie

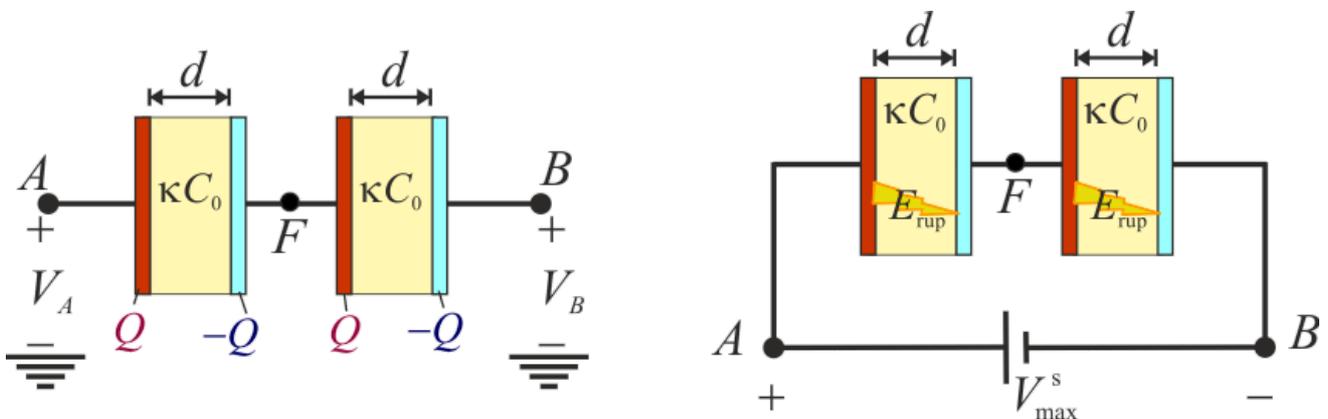
En este tipo de asociación, el conductor equipotencial que se forma al conectar los dos condensadores ha de estar aislado y descargado, de manera que las cargas en los conductores que se encuentran a distinto potencial, han de tener valores opuestos, $+Q$ y $-Q$. Y como los dos condensadores son idénticos, las diferencias de potencial en los condensadores también será la misma; en consecuencia, estas diferencias de potencial serán igual a la mitad de diferencial de potencial total en la asociación. Se tendrá, por tanto:

$$\frac{Q}{C} = V_A - V_F = V_F - V_B = \frac{V_A - V_B}{2} \quad \rightarrow \quad U_e^s = \frac{1}{2} [Q(V_A - V_F) + Q(V_F - V_B)] = \frac{C}{4} (V_A - V_B)^2$$

donde U_e^s es la energía electrostática almacenada en la asociación en serie, en términos de la capacidad C de cada uno de los condensadores idénticos, y de la diferencial de potencial a la que se halla sometida la asociación. Como puede comprobarse, para la misma diferencial de potencial $\Delta V = V_A - V_B$, esta asociación almacenaría la cuarta parte de la asociación en paralelo. Sin embargo, el valor máximo de energía almacenable está determinado por el de la máxima diferencial de potencial aplicable al sistema V_{\max}^s sin que se llegue a la ruptura dieléctrica en los condensadores; es decir, en nuestro caso de condensadores idénticos conectados en serie:

$$V_A - V_B = \int_{A(\text{diel})}^F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{F(\text{diel})}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 2|\mathbf{E}|d < 2E_{\text{rup}}d = V_{\max}^s \quad \Rightarrow$$

$$U_e^s < \frac{C}{4} (V_{\max}^s)^2 = \frac{C}{4} (2dE_{\text{rup}})^2 = U_e^s|_{\max}$$



En resumen, la energía electrostática máxima que se puede almacenar en una asociación de dos condensadores planos paralelos idénticos de sección S , rellenos de un dieléctrico de constante

dieléctrica κ , espesor d , y con un valor de campo de ruptura E_{rup} , es independiente del tipo de asociación y vale:

$$U_e^p|_{\text{max}} = U_e^s|_{\text{max}} = C d^2 E_{\text{rup}}^2 = \kappa \varepsilon_0 S d E_{\text{rup}}^2$$